

# Fenomeni quantistici macroscopici: superfluidità, superconduttività e condensazione di Bose-Einstein

Luca Salasnich

CNISM and CNR-INFN, Unità di Padova

Dipartimento di Fisica "Galileo Galilei", Università di Padova

e-mail: [salasnich@pd.infn.it](mailto:salasnich@pd.infn.it)

web-page: [www.padova.infn.it/salasnich/](http://www.padova.infn.it/salasnich/)

Seminario di orientamento in Matematica Applicata

Verona, 30 aprile 2008

# Sommario

- Le transizioni di fase
- I costituenti della materia: bosoni e fermioni
- Le transizioni super: fenomeni quantistici macroscopici
  - Superconduttività
  - Superfluidità
  - Condensazione di Bose-Einstein nei gas ultrafreddi
- L'equazione di Gross-Pitaevskii
- L'equazione di Ginzburg-Landau
- Conclusioni

## Le transizioni di fase

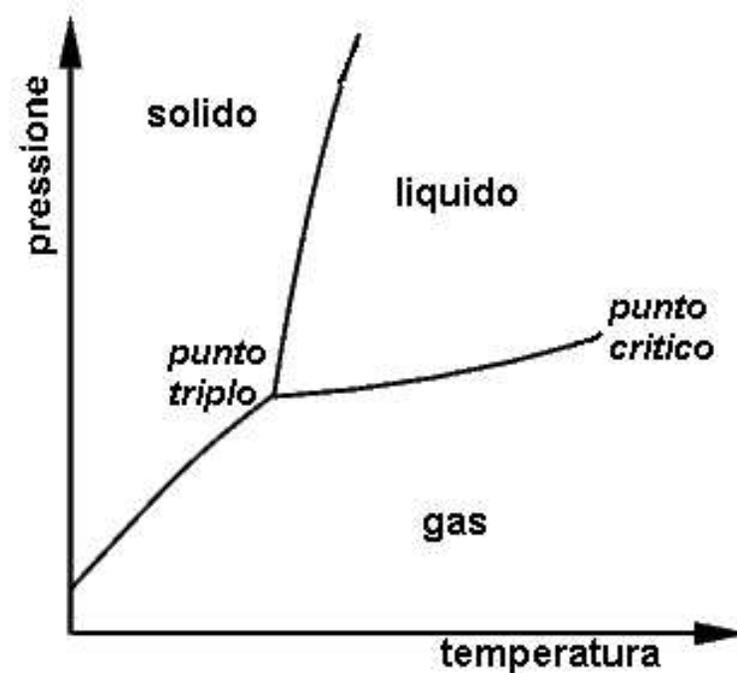
In natura il **fenomeno complesso** per eccellenza è la transizione di fase: il sistema macroscopico in esame ha un radicale cambiamento delle sue proprietà al variare di una variabile termodinamica.

Come noto vi sono vari tipi di transizioni di fase, tra queste ricordiamo:

- le transizioni tra le fasi solida, liquida, e gassosa;
- la transizione tra la fasi ferromagnetica e paramagnetica dei materiali magnetici;
- la transizione conduttore-superconduttore o isolante-superconduttore in certi metalli e leghe;
- la transizione dallo stato normale a quello superfluido nell'elio liquido.

Solitamente la grandezza termodinamica che determina la transizione di fase è la **temperatura**  $T$ . Diminuendo la temperatura  $T$  si entra in un mondo ricco di comportamenti sorprendenti: dal disordine all'ordine.

Alla temperatura critica di transizione  $T_c$  le tantissime particelle (atomi o molecole) del sistema agiscono in modo cooperativo e si organizzano quasi simultaneamente.



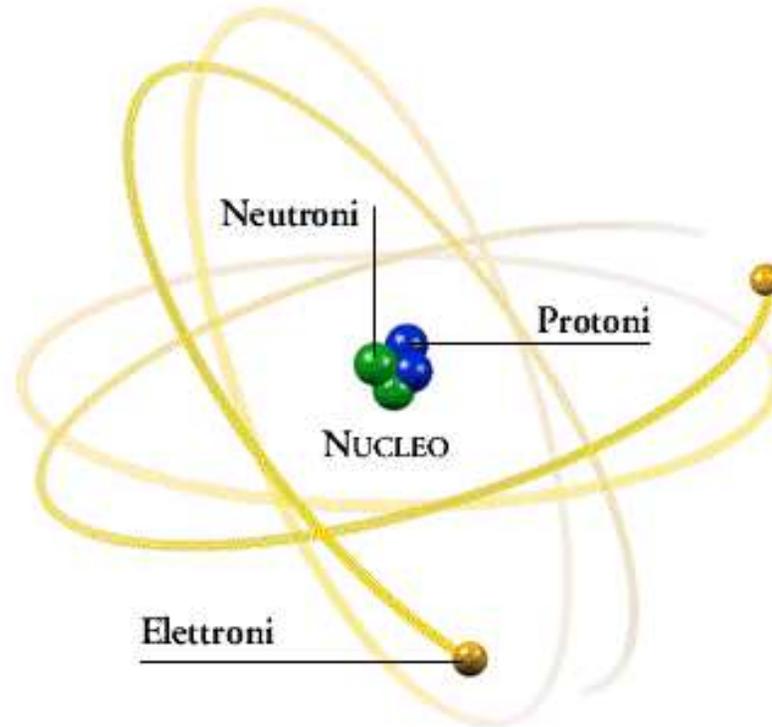
Nell'acqua a pressione atmosferica, transizione gas-liquido con  $T_c = 100^\circ\text{C}$ , transizione liquido-solido con  $T_c = 0^\circ\text{C}$ .

# I costituenti della materia: bosoni e fermioni

La materia è costituita da tantissimi **atomi**.

Un singolo atomo è costituito da:

- un nucleo centrale (con carica positiva), composto da protoni (positivi) e neutroni (neutri);
- elettroni (con carica negativa) orbitanti attorno al nucleo.



Il numero di protoni individua l'atomo. Esempio: l'idrogeno ha 1 protone, l'elio ha 2 protoni, il litio ha 3 protoni, il berillio ha 4 protoni, ecc.

## Lo spin delle particelle

Dagli esperimenti si trova che ogni particella è dotata di un momento angolare intrinseco, detto **spin**  $S$ .

Si può cioè immaginare che la particella ruoti attorno al proprio asse come una trottola.

Tutte le particelle si dividono in due grandi gruppi:

– **bosoni**, con uno spin  $S$  che è un multiplo intero della costante di Planck  $\hbar$ :

$$S = n\hbar, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

– **fermioni**, con uno spin  $S$  che è un multiplo semi intero di  $\hbar$ :

$$S = \frac{n}{2}\hbar, \quad n = 1, 2, 3, \dots.$$

La costante di Planck vale

$$\hbar = 1.054 \times 10^{-34} \text{ Joule/secondo}.$$

Negli atomi neutri lo spin di un generico atomo



è la somma degli spin delle particelle che costituiscono l'atomo:

$A$  nucleoni (protoni e neutroni) nel nucleo atomico e  $Z$  elettroni che orbitano attorno al nucleo.

Dato che sia i nucleoni che gli elettroni sono fermioni, l'atomo neutro  ${}^A_Z X$  è un bosone se il numero  $A + Z$  è pari ed un fermione se  $A + Z$  è dispari.

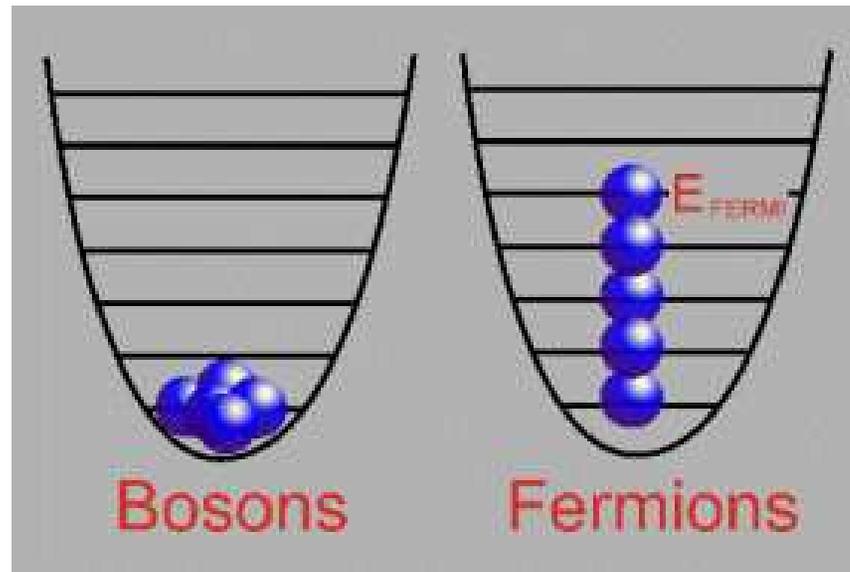
Esempio: l'elio 4, cioè  ${}^4_2\text{He}$ , è un bosone, mentre l'elio 3, cioè  ${}^3_2\text{He}$ , è un fermione.

Ma la cosa più sorprendente è che

**quando sono messi assieme i bosoni si comportano in modo molto diverso dai fermioni!!**

## Bosoni e fermioni: un comportamento molto diverso

- Bosoni uguali possono occupare lo stesso stato, cioè possono stare molto vicini tra di loro; se tutti i bosoni sono nello stesso stato si ha la **condensazione di Bose-Einstein**.
- Fermioni uguali NON possono occupare lo stesso stato, cioè devono stare distanti tra di loro: **principio di esclusione di Pauli**.



Bosoni e fermioni in una trappola armonica.

La **meccanica statistica quantistica** studia il comportamento dei bosoni e dei fermioni al variare della temperatura  $T$ . Se l'energia di una singola particella è data da

$$E(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + U(\mathbf{r}) ,$$

allora i bosoni non interagenti seguono la *distribuzione di Bose-Einstein*

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E(\mathbf{r}, \mathbf{v}) - \mu}{k_B T}\right) - 1} ,$$

mentre i fermioni non interagenti seguono la *distribuzione di Fermi-Dirac*

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E(\mathbf{r}, \mathbf{v}) - \mu}{k_B T}\right) + 1} ,$$

dove  $K_B$  è la costante di Boltzmann. Il numero totale di particelle è dato da

$$N = \left(\frac{m}{2\pi\hbar}\right)^3 \int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{v} ,$$

e questa relazione fissa il potenziale chimico  $\mu$ .

## Le transizioni super: fenomeni quantistici macroscopici

Quando la temperatura  $T$  è abbastanza alta, le distribuzioni statistiche dei bosoni e dei fermioni tendono alla stessa distribuzione: la *distribuzione di Maxwell-Boltzmann*, e quindi lo spin non è importante (**meccanica statistica classica**).

In effetti, per vedere le differenze dovute allo spin tra bosoni e fermioni (degenerazione quantistica) bisogna abbassare **DI MOLTO** la temperatura!!

Nel caso di  $N$  particelle non interagenti in un recipiente di volume  $V$ , la temperatura critica di degenerazione quantistica può essere stimata come

$$T_c \simeq \frac{\hbar^2}{mK_B} \left(\frac{N}{V}\right)^{2/3} .$$

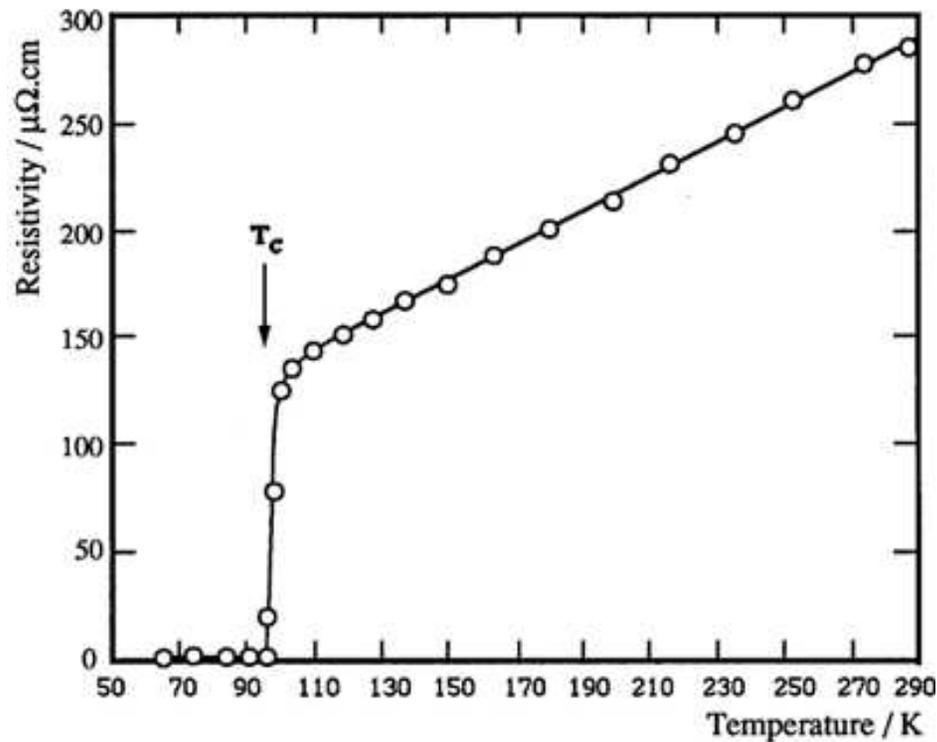
Al di sotto di questa temperatura critica  $T_c$  la materia si comporta in modo strano: può diventare **supermateria**.

L'**interazione** tra le particelle modifica la  $T_c$  e può anche trasformare i fermioni in bosoni.

# Superconduttività

Nel 1911 il fisico olandese Heike Kamerlingh Onnes osservò che nel mercurio raffreddato a temperature inferiori ai  $T_c = 4.16$  Kelvin la resistenza elettrica diventa nulla.

Onnes chiamò questo fenomeno **superconduttività**.



La resistività in funzione della temperatura per un materiale superconduttore.

Molti materiali al di sotto di una temperatura critica  $T_c$  sono superconduttori.

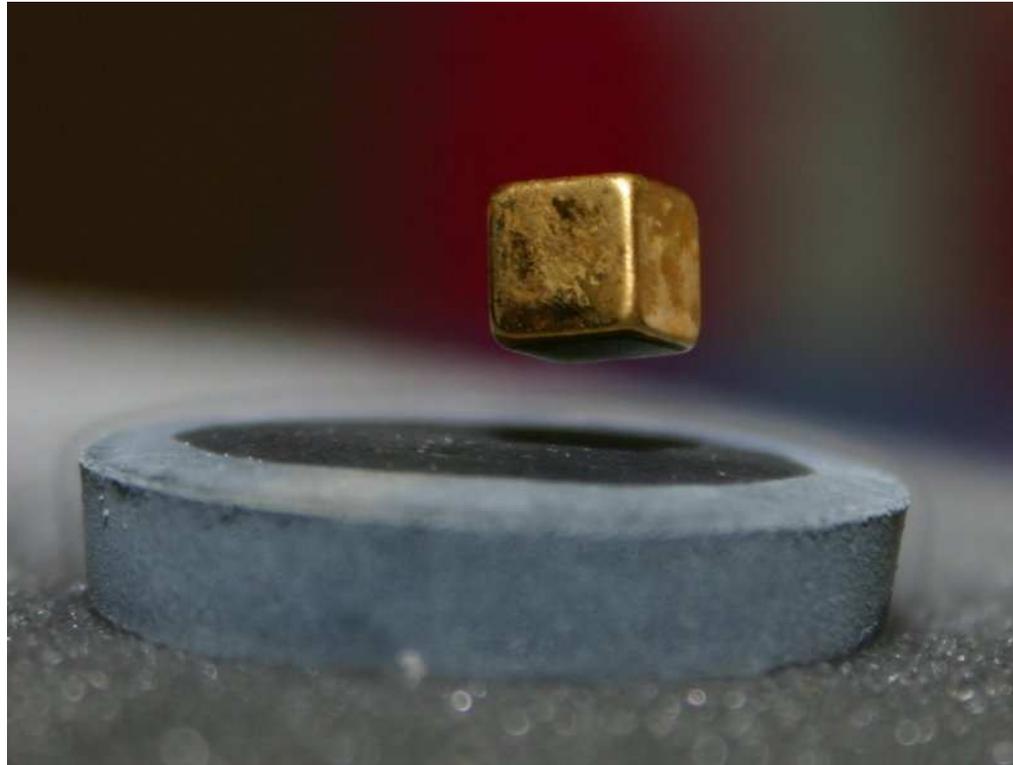
<b>Materiale</b>	<b>Simbolo</b>	<b><math>T_c</math> (Kelvin)</b>
alluminio	$^{27}_{13}\text{Al}$	1.19
stagno	$^{120}_{50}\text{Sn}$	3.72
mercurio	$^{202}_{80}\text{Hg}$	4.16
piombo	$^{208}_{82}\text{Pb}$	7.20
neodimio	$^{142}_{60}\text{Nb}$	9.30

Temperatura critica  $T_c$  di transizione alla superconduttività per alcuni materiali, a pressione atmosferica.

Nel 1986, nei laboratori dell'IBM di Zurigo, Karl Alex Müller e Johannes Georg Bednorz scoprirono i cosiddetti *superconduttori ad alta temperatura*.

Sono *cuprati*, cioè ceramiche di rame e ossigeno (ossidi di rame), la cui temperatura critica può raggiungere i 133 K.

I materiali superconduttori presentano anche altre proprietà. Ad esempio, l'espulsione del campo magnetico (effetto Meissner).



Levitazione di un superconduttore sopra un magnete.

Una applicazione industriale dell'effetto Meissner sono i treni a levitazione magnetica (maglev).

Un applicazione tecnologica e medica della superconduttività sono gli SQUID, dispositivi in grado di misurare campi magnetici molto piccoli.

# Superfluidità

Nel 1937 il fisico russo Pyotr Leonidovich Kapitza studiando l'elio 4 liquido scoprì che al di sotto di  $T_c = 2.16$  Kelvin l'elio 4 manifesta la completa assenza di viscosità nel moto di un fluido.

Kapitza chiamò questo fenomeno **superfluidità**.

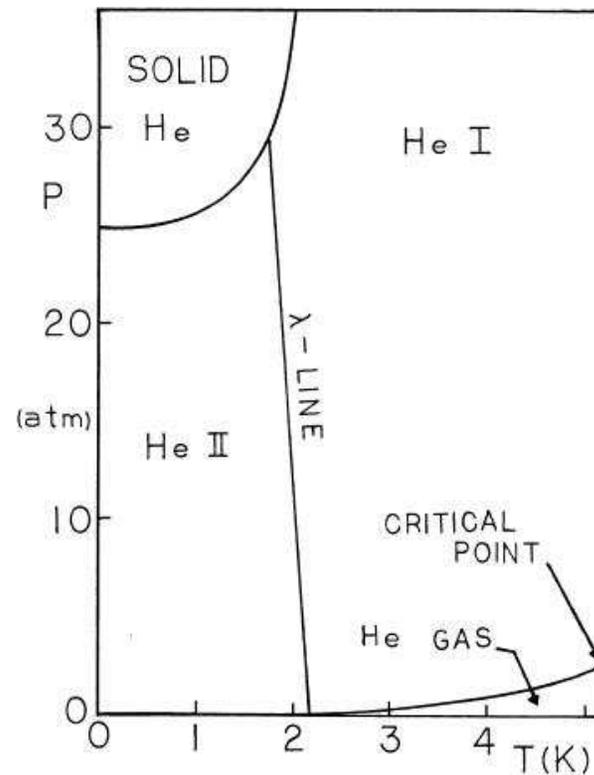
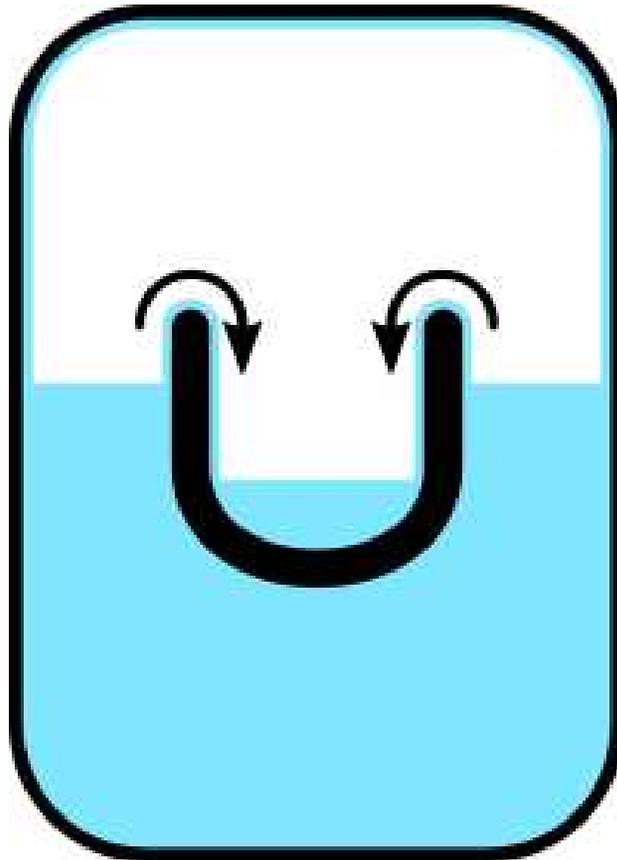


Diagramma di fase dell'elio 4.

Un oggetto immerso nell'elio superfluido si muove senza attrito viscoso fino a che la sua velocità  $v$  è minore di un valore critico  $v_c$ .

Inoltre, l'elio superfluido è in grado di risalire lungo le pareti fino ad uscire dal proprio contenitore.



L'elio superfluido che sale lungo le pareti.

Il fisico teorico tedesco Fritz London propose già nel 1938 una interpretazione della superfluidità dell'elio 4 basata sulla idea di condensazione di Bose-Einstein.

London notò che l' $^4\text{He}$  è un bosone e che la temperatura critica  $T_c$  della condensazione di Bose-Einstein in un gas ideale è in buon accordo con la  $T_c$  dell'elio 4.

London introdusse il concetto di **funzione d'onda macroscopica**  $\psi(\mathbf{r}, t)$ , tale che

$$n(\mathbf{r}, t) = |\psi(\mathbf{r}, t)|^2$$

rappresenta la densità di atomi nella posizione  $\mathbf{r}$  al tempo  $t$ , di modo che

$$N = \int n(\mathbf{r}, t) d^3\mathbf{r} = \int |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 d^3\mathbf{r}$$

è il numero totale di atomi nel condensato di Bose-Einstein.

Infatti, le particelle che costituiscono il condensato di Bose-Einstein sono tutte nello stesso stato quantico, e cioè sono tutte caratterizzate dalla stessa funzione d'onda quantistica  $\psi(\mathbf{r}, t)$ .

Nel 1950 i teorici russi Lev Landau e Vitaly Ginzburg proposero l'idea di un parametro d'ordine, o funzione d'onda macroscopica,  $\psi(\mathbf{r}, t)$  anche nel caso nella superconduttività.

Gli elettroni, le particelle che trasportano la corrente elettrica, sono però fermioni. Come si spiega allora la presenza di una condensazione di Bose-Einstein?

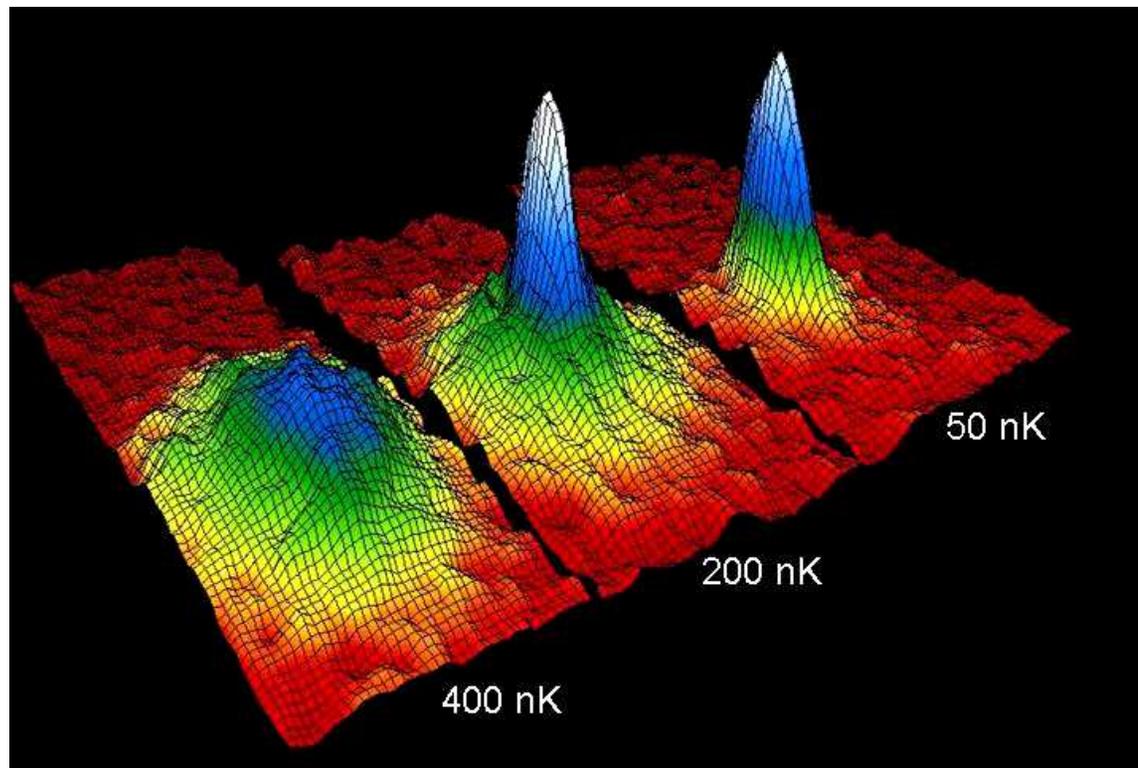
Nel 1957 da tre ricercatori statunitensi, John Bardeen, Leon Cooper e Robert Schrieffer, suggerirono, che a causa del reticolo cristallino ionico, nella superconduttività si formano coppie di elettroni con spin antiparalleli.

Secondo questa teoria, detta teoria BCS, ogni coppia di elettroni, detta **coppia di Cooper**, si comporta come un bosone.

# Condensazione di Bose-Einstein nei gas ultrafreddi

Nel 1995 Eric Cornell, Carl Wieman e Wolfgang Ketterle sono riusciti ad ottenere vapori atomici (rubidio e sodio) che rimangono gassosi fino allo zero assoluto.

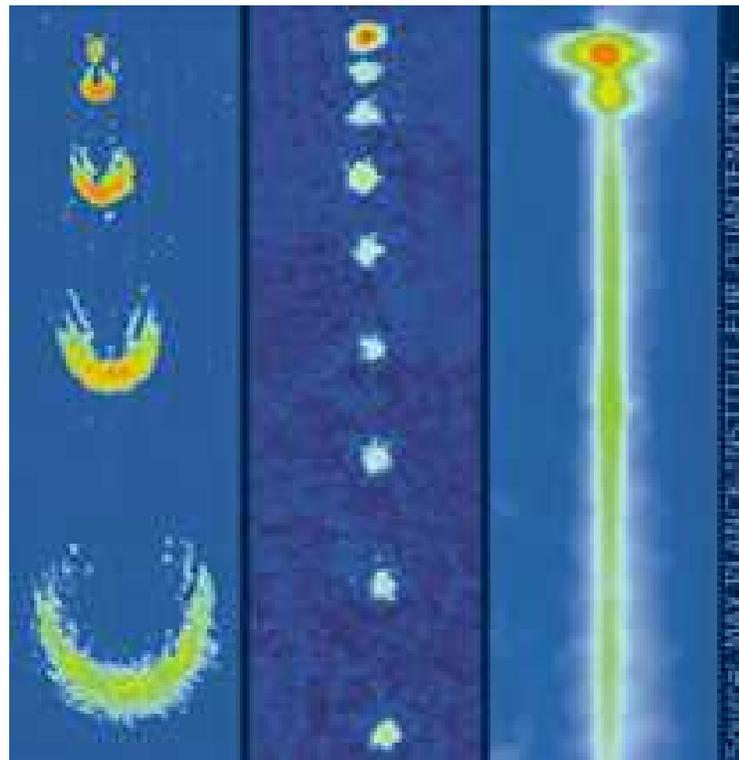
In questo modo essi hanno “fotografato” la formazione di un **condensato di Bose-Einstein** al diminuire della temperatura, con  $T_c \simeq 100$  nanoKelvin.



Profili di densità del gas atomico di Rubidio.

I condensati di Bose-Einstein ottenuti con gli atomi alcalini ultrafreddi sono l'analogo atomico dei laser: **onde di materia** coerente invece di onde di luce coerente.

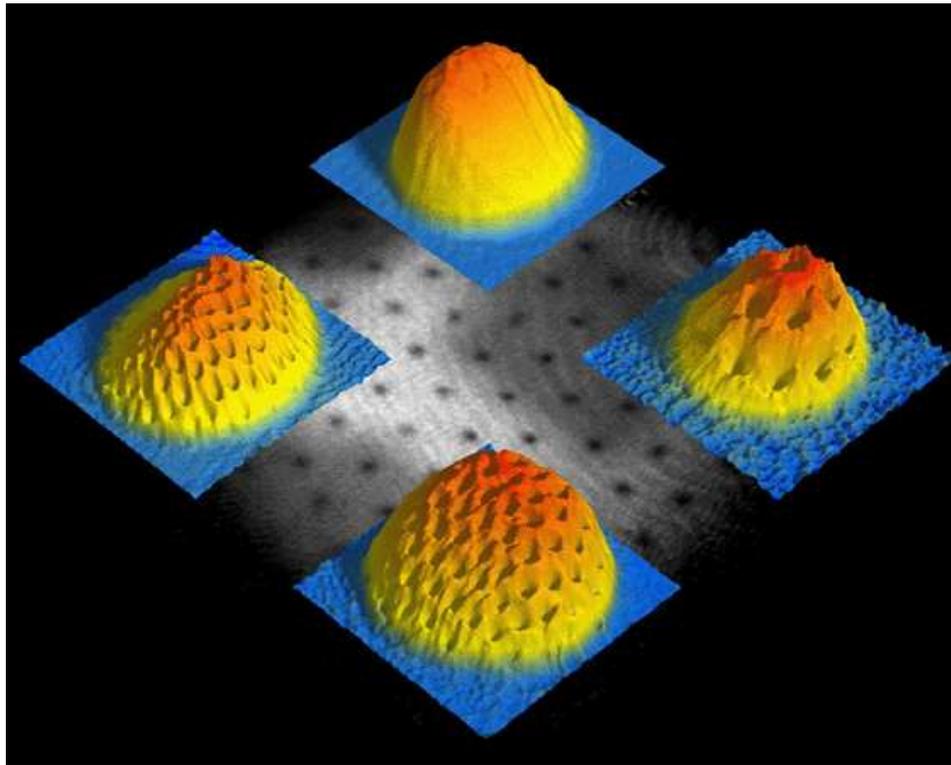
Il **laser** è caratterizzato da un fascio collimato, monocromatico e coerente.



Esperimenti per la realizzazione di un **laser atomico** con i condensati di Bose-Einstein.

Un'altra interessante conseguenza della condensazione di Bose-Einstein nei gas alcalini ultrafreddi e nell'elio 4 è la possibilità di **vortici quantizzati**, dove la velocità del fluido segue la legge

$$v = \frac{\hbar k}{m r_{\perp}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$



Formazione di vortici quantizzati in un gas di atomi di rubidio 87 nella fase condensata. Il numero di vortici aumenta all'aumentare della frequenza di rotazione del gas.

## L'equazione di Gross-Pitaevskii

I condensati di Bose-Einstein negli atomi alcalini ultrafreddi, ed in parte anche l'elio superfluido, sono descrivibili tramite la seguente equazione differenziale non-lineare alle derivate parziali

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\mathbf{r}, t) + g|\psi(\mathbf{r}, t)|^2 \right] \psi(\mathbf{r}, t) ,$$

con

$\psi(\mathbf{r}, t)$  la funzione d'onda macroscopica degli atomi condensati di massa  $m$ ,  
 $U(\mathbf{r}, t)$  il potenziale esterno di confinamento per gli atomi, e  
 $g$  un parametro che misura l'intensità della interazione tra gli atomi.

Questa equazione è nota come equazione di Gross-Pitaevskii. Essa descrive in modo molto accurato le proprietà dei condensati puri, cioè senza la componente termica.

## L'equazione di Ginzburg-Landau

I superconduttori sono descrivibili tramite la seguente equazione differenziale non-lineare alle derivate parziali

$$\left[ \frac{1}{2m^*} (-i\hbar\nabla - e^*\mathbf{A}(\mathbf{r}))^2 + \alpha(T) + \beta(T)|\psi(\mathbf{r})|^2 \right] \psi(\mathbf{r}) = 0 ,$$

con

$\psi(\mathbf{r})$  la funzione d'onda macroscopica delle coppie di Cooper di massa  $m^*$  e carica elettrica  $e^*$ ,

$\mathbf{A}(\mathbf{r})$  il potenziale vettore che determina il campo magnetico con  $\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}$ ,  
 $\alpha(T)$  e  $\beta(T)$  due parametri fenomenologici che dipendono dalla temperatura  $T$ .

Questa equazione è nota come equazione di Ginzburg-Landau. Accoppiata con una equazione per il potenziale vettore  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ , essa può essere usata per studiare varie proprietà dei superconduttori a temperatura finita.

# Conclusioni

- La studio della supermateria è un settore di ricerca molto attivo.
- Ci sono precise equazioni che descrivono la supermateria.
- Tra queste: l'equazione di Gross-Pitaevskii e l'equazione di Ginzburg-Landau. Entrambe sono equazioni differenziali nonlineari alle derivate parziali.
- Non tutte le possibili soluzioni di queste equazioni sono state esplorate.
- Vecchi e nuovi metodi analitici e numerici possono essere utili al riguardo.
- Le potenziali applicazioni tecnologiche sono molteplici: sensori ad interferometria atomica, computer quantistici, ecc.

GRAZIE!!